

統計學·第 14 章 簡單線性迴歸
整章練習卷·答案卷

Simple Linear Regression

時限：55 分鐘 | 總分：50 分 | 題數：5 題 | 每題標示配分與預估時間

姓名 _____ 學號 _____ 日期 _____

第 1 題

[10 分·約·完整配適+斜率檢定]

$x=1.6$; $y=2,4,5,4,6,9$; $\alpha = 0.05$ 。

解答

$$\sum x = 21, \sum y = 30, \sum xy = 125, \sum x^2 = 91, \sum y^2 = 178, n = 6 \circ$$
$$S_{xy} = 125 - \frac{21 \cdot 30}{6} = 20, S_{xx} = 91 - \frac{21^2}{6} = 17.5, S_{yy} = 178 - \frac{30^2}{6} = 28 \circ$$

$$(1) b_1 = \frac{20}{17.5} = 1.143, b_0 = 5 - 1.143 \cdot 3.5 = 1.0 \rightarrow \hat{y} = 1.0 + 1.143x$$

$$(2) SSE = 28 - \frac{20^2}{17.5} = 5.143, S_e = \sqrt{5.143/4} = 1.134, R^2 = \frac{20^2}{17.5 \cdot 28} = 0.816$$

$$(3) H_0: \beta_1 = 0; T = \frac{1.143}{1.134/\sqrt{17.5}} = \frac{1.143}{0.271} = 4.22, df = 4; R = \{|T| \geq 2.776\}$$

$$(4) 4.22 \geq 2.776 \Rightarrow \text{Reject } H_0: \text{研發投入與專利數有顯著線性關係 } (R^2 = 0.816) \circ$$

檢誤·易錯

迴歸線過 (3.5, 5) 。 $R^2 = 0.816 =$ 解釋 81.6% 變異 。 t 自由度 $n - 2 = 4$ 。

第 2 題

[10 分·約·評估 + 相關係數正負]

$n = 8$; $S_{xy} = -15, S_{xx} = 12, S_{yy} = 30$ 。

解答

$$b_1 = \frac{-15}{12} = -1.25; SSE = 30 - \frac{(-15)^2}{12} = 30 - 18.75 = 11.25; S_e = \sqrt{11.25/6} = 1.369 \circ$$
$$R^2 = \frac{(-15)^2}{12 \cdot 30} = \frac{225}{360} = 0.625; r = -\sqrt{0.625} = -0.79 \text{ (負, 因 } S_{xy} < 0) \circ$$

檢誤·易錯

r 的符號跟 S_{xy} (與 b_1) 一致：負斜率 \rightarrow 負相關。 R^2 永遠非負，要靠 b_1 判斷 r 正負。

第 3 題

[10 分·約·斜率信賴區間]

$n = 10$; $b_1 = 2.5, S_e = 1.2, S_{xx} = 16$; 95% CI 。

解答

$$\text{se}(b_1) = \frac{S_e}{\sqrt{S_{xx}}} = \frac{1.2}{4} = 0.30 ; t_{0.025,8} = 2.306 \circ$$

$$\beta_1 \text{ 的 } 95\% \text{ CI} = b_1 \pm t_{0.025,8} \cdot \text{se}(b_1) = 2.5 \pm 2.306(0.30) = 2.5 \pm 0.692 = (1.81, 3.19).$$

區間不含 0 \rightarrow 在 $\alpha = 0.05$ 雙尾下可拒絕 $\beta_1 = 0$ ，即有顯著線性關係。

檢誤·易錯

CI 不含 0 雙尾拒絕 $\beta_1 = 0$ 。自由度 $n - 2 = 8$ ； $\text{se}(b_1) = S_e / \sqrt{S_{xx}}$ 。

第 4 題

[10 分 · 約 · 概念 · 模型與判讀]

解答

(a) 模型 $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ ；最小平方法最小化誤差平方和 $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ 。

(b) 檢定 $\beta_1 = 0$ (斜率)；自由度 $n - 2$ 。

(c) $R^2 =$ 可解釋變異占總變異的比例 (SSR/SST)； $R^2 = r^2$ 。 R^2 高不代表因果 (只表示線性配適好)。

(d) ε 四條件：常態、均值 0、標準差 σ 固定 (等變異)、各誤差獨立。

檢誤·易錯

關鍵：最小化 $\sum (y - \hat{y})^2$ ；線性關係 = $\beta_1 = 0$ 、 $df = n - 2$ ； $R^2 = r^2$ 但非因果；誤差常態/0/等變異/獨立。

第 5 題

[10 分 · 約 · R^2 與相關係數]

$$n = 20 ; S_{xy} = 48, S_{xx} = 40, S_{yy} = 80 \circ$$

解答

$$b_1 = \frac{48}{40} = 1.2 ; R^2 = \frac{48^2}{40 \cdot 80} = \frac{2304}{3200} = 0.72 ; r = +\sqrt{0.72} = 0.849 \text{ (正, 因 } S_{xy} > 0 \text{)} \circ$$

解讀： x 解釋了 y 約 72% 的變異，兩者有強正線性相關。

檢誤·易錯

$R^2 = r^2$ ； r 符號同 S_{xy} (正)。 $R^2 = 0.72 =$ 解釋 72% 變異。