

第 13 章 卡方檢定·各題型完整解題

Chi-Square Tests — Worked Examples

卡方檢定一律**右尾**，統計量都是 $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$ 。每題走完整流程： H_0/H_1 期望次數 E 拒絕域（臨界值法）計算 χ^2 決策與結論，並附 **p-value 對照**（用 χ^2 表把 p 夾出範圍，與臨界值法互相驗證）。臨界值取自 χ^2 上尾分位表。

適合度檢定 (Goodness-of-Fit)

題型 1 給定特定比例 (結果：拒絕)

題目 某品牌廣告前市佔率 A:B:其他 = 0.45 : 0.40 : 0.15。廣告後隨機抽 200 人，偏好 A、B、其他者分別為 102、82、16。在 $\alpha = 0.05$ 下，檢定市佔率是否已改變。

解

- $H_0: p_A = 0.45, p_B = 0.40, p_{\text{其他}} = 0.15$ (未改變)； H_1 : 至少一個比例與指定值不同。
- 期望次數 $E_i = n p_{i0} = 200 \times (0.45, 0.40, 0.15) = (90, 80, 30)$ 。每格 ≥ 5 ，符合五的規則。
- 自由度 $df = k - 1 = 3 - 1 = 2$ ；拒絕域 $R = \{\chi^2 \geq \chi_{0.05, 2}^2 = 5.991\}$ 。
- 計算：

$$\chi^2 = \frac{(102 - 90)^2}{90} + \frac{(82 - 80)^2}{80} + \frac{(16 - 30)^2}{30} = 1.600 + 0.050 + 6.533 = 8.18.$$

- 決策： $8.18 \geq 5.991$ ，落入 $R \Rightarrow$ **拒絕** H_0 。結論：在 $\alpha = 0.05$ 下有足夠證據說市佔率已改變。

p-value 對照： $p = P(\chi_2^2 \geq 8.18)$ 。查表 $\chi_{0.025, 2}^2 = 7.378$ 、 $\chi_{0.01, 2}^2 = 9.210$ ，8.18 介於兩者 $\Rightarrow 0.01 < p < 0.025$ 。 $p < 0.05$ ，與臨界值法同樣拒絕。

題型 2 均勻 (等比例) 分配 (結果：不拒絕)

題目 擲一顆骰子 120 次，點數 1~6 出現次數為 15, 23, 18, 22, 16, 26。在 $\alpha = 0.05$ 下，檢定這顆骰子是否公平。

解

- $H_0: p_1 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ (公平)； H_1 : 至少一面機率 $\neq \frac{1}{6}$ 。
- 期望次數 $E_i = n p_{i0} = 120 \times \frac{1}{6} = 20$ (每一面)。
- $df = k - 1 = 6 - 1 = 5$ ； $R = \{\chi^2 \geq \chi_{0.05, 5}^2 = 11.070\}$ 。
- 計算：

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(15-20)^2 + (23-20)^2 + (18-20)^2 + (22-20)^2 + (16-20)^2 + (26-20)^2}{20} \\ &= \frac{25 + 9 + 4 + 4 + 16 + 36}{20} = \frac{94}{20} = 4.70. \end{aligned}$$

- 決策： $4.70 < 11.070$ ，不落入 $R \Rightarrow$ **不拒絕** H_0 。結論：沒有足夠證據說骰子不公平。

p-value 對照： $\chi_{0.10,5}^2 = 9.236$ ， $4.70 < 9.236 \Rightarrow p > 0.10$ 。 $p > 0.05$ ，與臨界值法同樣不拒絕。

題型 3 期望次數 < 5 要合併（五的規則；結果：拒絕）

題目 五家公司宣稱市佔率為 0.40, 0.32, 0.24, 0.02, 0.02。抽 200 人，偏好各公司者為 70, 60, 54, 10, 6。在 $\alpha = 0.05$ 下檢定實際市佔是否與宣稱相符。

解

- H_0 : 市佔 = (0.40, 0.32, 0.24, 0.02, 0.02) ; H_1 : 至少一個不符。
- 期望 $E = 200 \times (0.40, 0.32, 0.24, 0.02, 0.02) = (80, 64, 48, 4, 4)$ 。D、E 兩格 $E = 4 < 5$ ，違反五的規則 \Rightarrow **合併 D、E**：機率 0.04、 $E = 8$ 、 $O = 10 + 6 = 16$ 。
- 合併後 $k = 4$ ， $df = 4 - 1 = 3$ ； $R = \{\chi^2 \geq \chi_{0.05,3}^2 = 7.815\}$ 。
- 計算：

$$\chi^2 = \frac{(70 - 80)^2}{80} + \frac{(60 - 64)^2}{64} + \frac{(54 - 48)^2}{48} + \frac{(16 - 8)^2}{8} = 1.25 + 0.25 + 0.75 + 8.00 = 10.25.$$

- 決策： $10.25 \geq 7.815 \Rightarrow$ **拒絕 H_0** 。結論：實際市佔與宣稱不符。

p-value 對照： $\chi_{0.025,3}^2 = 9.348$ 、 $\chi_{0.01,3}^2 = 11.345$ ， 10.25 介於 $\Rightarrow 0.01 < p < 0.025 < 0.05$ ，拒絕，一致。

列聯表檢定 (Contingency Table)

題型 4 獨立性檢定 2×3 (結果：拒絕)

題目 隨機訪問 395 人，記錄性別與常用購物平台，得下表。在 $\alpha = 0.05$ 下檢定性別與購物平台是否獨立。

	Yahoo	Momo	東森	合計 R_i
男	30	24	21	75
女	182	104	34	320
合計 C_j	212	128	55	395

解

- H_0 : 性別與購物平台**獨立**； H_1 : 不獨立 (有關)。

- 期望次數 $E_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}$:

$$E_{\text{男}} = \left(\frac{75 \cdot 212}{395}, \frac{75 \cdot 128}{395}, \frac{75 \cdot 55}{395} \right) = (40.25, 24.30, 10.44), \quad E_{\text{女}} = (171.75, 103.70, 44.56).$$

- $df = (r - 1)(c - 1) = (2 - 1)(3 - 1) = 2$ ； $R = \{\chi^2 \geq \chi_{0.05,2}^2 = 5.991\}$ 。

4. 計算：

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(30 - 40.25)^2}{40.25} + \frac{(24 - 24.30)^2}{24.30} + \frac{(21 - 10.44)^2}{10.44} \\ &\quad + \frac{(182 - 171.75)^2}{171.75} + \frac{(104 - 103.70)^2}{103.70} + \frac{(34 - 44.56)^2}{44.56} \\ &= 2.612 + 0.004 + 10.672 + 0.612 + 0.001 + 2.501 = 16.40.\end{aligned}$$

5. 決策：16.40 \geq 5.991 \Rightarrow **拒絕** H_0 。結論：性別與購物平台有關（不獨立）。

p-value 對照： $\chi_{0.01,2}^2 = 9.210$ ，16.40 $>$ 9.210 $\Rightarrow p < 0.01 < 0.05$ ，拒絕，一致。

題型 5 齊一性檢定 2×3 (結果：不拒絕)

題目 在城市、鄉村各隨機抽 100 人，問對某政策的態度（贊成／中立／反對），得下表。在 $\alpha = 0.05$ 下檢定兩地區的態度分配是否相同。

	贊成	中立	反對	合計 R_i
城市	40	35	25	100
鄉村	30	30	40	100
合計 C_j	70	65	65	200

解

1. H_0 ：城市與鄉村的態度分配相同； H_1 ：不相同。

2. 期望次數 $E_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}$ （兩列總皆 100，故兩列期望相同）：

$$E = \left(\frac{100 \cdot 70}{200}, \frac{100 \cdot 65}{200}, \frac{100 \cdot 65}{200} \right) = (35, 32.5, 32.5) \quad (\text{城、鄉各一列}).$$

3. $df = (r - 1)(c - 1) = (2 - 1)(3 - 1) = 2$ ； $R = \{\chi^2 \geq \chi_{0.05,2}^2 = 5.991\}$ 。

4. 計算：

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(40 - 35)^2}{35} + \frac{(35 - 32.5)^2}{32.5} + \frac{(25 - 32.5)^2}{32.5} \\ &\quad + \frac{(30 - 35)^2}{35} + \frac{(30 - 32.5)^2}{32.5} + \frac{(40 - 32.5)^2}{32.5} \\ &= 0.714 + 0.192 + 1.731 + 0.714 + 0.192 + 1.731 = 5.27.\end{aligned}$$

5. 決策：5.27 $<$ 5.991 \Rightarrow **不拒絕** H_0 。結論：沒有足夠證據說兩地區態度分配不同。

p-value 對照： $\chi_{0.10,2}^2 = 4.605$ 、 $\chi_{0.05,2}^2 = 5.991$ ，5.27 介於 $\Rightarrow 0.05 < p < 0.10$ (> 0.05)，不拒絕，一致。

備註 (獨立性 vs 齊一性)：兩者計算完全相同 ($E_{ij} = R_i C_j / n$ 、 $df = (r - 1)(c - 1)$ 、同一個 χ^2)。差別只在：獨立性是抽單一母體記錄兩屬性、檢定兩屬性是否獨立；齊一性是從多個母體各抽固定樣本、檢定各母體分配是否相同。