第 12 章　變異數分析（一因子）

One-Way Analysis of Variance (ANOVA)

第 11 章比較**兩個**母體平均數；當要比較**三個以上**母體平均數是否有差異，用變異數分析（ANOVA）。核心想法：把資料的總變異拆成「處理間變異」與「處理內變異」，若處理間變異顯著大於處理內變異，就拒絕「所有平均數相等」。本章只談一因子 ANOVA。

目錄

1 名詞速查（五欄詞表）

中文術語	English	符號	一句定義	用途／易混
變異數分析	analysis of variance	ANOVA	用樣本變異比較 ≥ 3 母體平均數是否相等	推廣等變異兩樣本 t
因子／水準	factor / level	—	分類變數及其各類別（=處理）	處理 = treatment
處理平方和	treatment SS	SSTR	各組平均與總平均差的加權平方和	組間，$df = k-1$
誤差平方和	error SS	SSE	各組內觀察值與組平均差的平方和	組內，$df = n-k$
總平方和	total SS	SST	全部觀察值與總平均差的平方和	SST=SSTR+SSE，$df = n-1$
處理均方	treatment mean square	MSTR	SSTR$/(k-1)$	σ^2 的估計（組間）
誤差均方	error mean square	MSE	SSE$/(n-k)$	σ^2 的估計（組內）
F **統計量**	F statistic	$F = \dfrac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$	服從 $F_{(k-1,\,n-k)}$	右尾檢定
無母數替代	Kruskal–Wallis	—	常態假設不成立時改用	對應 ANOVA

符號：k 組（水準）數，n_i 第 i 組樣本數，$n = \sum n_i$ 總樣本數，$\bar{x}_i$ 第 i 組平均，$\bar{x}$ 總平均，S_i^2 第 i 組樣本變異數。

2 核心概念：把變異拆開

問題與假設 比較 k 個母體平均數是否全等：

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \ (= \mu); \qquad H_1 : \text{至少有一組}\mu_i \neq \mu_j.$$

三個前提：(1) 各母體常態；(2) 各母體變異數未知但**相等**（共同 σ^2）；(3) 樣本獨立。

為什麼看「變異」就能比平均數 若 H_0 為真，各組樣本平均 $\bar{x}_i$ 會彼此接近（圍著總平均 $\bar{x}$）；若 H_0 為假，$\bar{x}_i$ 會散得較開。於是用兩個獨立的 σ^2 估計來對比：

- **處理間變異（組間）**：來自各組平均彼此的差異 $\to$ MSTR。
- **處理內變異（組內）**：來自各組內部觀察值的隨機波動 $\to$ MSE。

若 MSTR 顯著大於 MSE（比值 F 夠大），代表「組間差異」不只是隨機，拒絕 H_0。

推導：總變異的分解 SST = SSTR + SSE

把每個觀察值對總平均的差拆成兩段：$x_{ij} - \bar{x} = (x_{ij} - \bar{x}_i) + (\bar{x}_i - \bar{x})$。平方後對 i, j 加總，交叉項

$$2\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) = 2\sum_i (\bar{x}_i - \bar{x}) \underbrace{\sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)}_{=0} = 0,$$

故 $\sum_i \sum_j (x_{ij}-\bar{x})^2 = \underbrace{\sum_i \sum_j (x_{ij}-\bar{x}_i)^2}_{\text{SSE}} + \underbrace{\sum_i n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2}_{\text{SSTR}}$。自由度同樣可加：$n-1=(n-k)+(k-1)$。

3　主要內容：平方和、均方與 F 檢定

平方和與均方

總平均 $\bar{x}=\dfrac{\sum_i n_i\bar{x}_i}{\sum_i n_i}=\dfrac{\sum_i\sum_j x_{ij}}{n}$。

$$\text{SSTR}=\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2,\qquad \text{SSE}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2.$$

$$\text{MSTR}=\frac{\text{SSTR}}{k-1},\qquad \text{MSE}=\frac{\text{SSE}}{n-k},\qquad F=\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}\sim F_{(k-1,\,n-k)}.$$

計算簡式（用各組總和 T_i 與總和 T）

令 $T_i=\sum_j x_{ij}$、$T=\sum_i T_i$，則

$$\text{SSTR}=\sum_{i=1}^{k}\frac{T_i^2}{n_i}-\frac{T^2}{n},\qquad \text{SST}=\sum_i\sum_j x_{ij}^2-\frac{T^2}{n},\qquad \text{SSE}=\text{SST}-\text{SSTR}.$$

推導：為什麼是 $F_{(k-1,n-k)}$、為什麼右尾

常態母體下 $\dfrac{(k-1)\text{MSTR}}{\sigma^2}\sim\chi^2_{k-1}$、$\dfrac{(n-k)\text{MSE}}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-k}$ 且獨立，兩者各除自由度相除：

$$F=\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}=\frac{\chi^2_{k-1}/(k-1)}{\chi^2_{n-k}/(n-k)}\sim F_{(k-1,n-k)}.$$

H_0 為假時只會使 MSTR 變大（組間差異變大），F 偏大，故**一律右尾**：$R=\{F\ge F_\alpha(k-1,n-k)\}$。

3.1　變異數分析表（ANOVA table）與檢定八步驟

變異來源	平方和 SS	自由度 df	均方 MS	F 值
組間（處理）	SSTR	$k-1$	MSTR$=\dfrac{\text{SSTR}}{k-1}$	$F=\dfrac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
組內（誤差）	SSE	$n-k$	MSE$=\dfrac{\text{SSE}}{n-k}$	
總和	SST	$n-1$		

檢定流程：(1) $H_0:\mu_1=\cdots=\mu_k$　(2) H_1：至少一組不等　(3) 統計量 F =MSTR/MSE　(4) α　(5) $R=\{F\ge F_\alpha(k-1,n-k)\}$　(6) 代值　(7) 比較下決策　(8) 白話結論。

4 例題

個案：三種包裝方式的銷售量（一因子 ANOVA）

四家規模相近超市試銷，三種包裝各賣一週，銷售量如下（每組 $n_i = 4$）：

	包裝 1	包裝 2	包裝 3	
觀察值	9,8,7,12	5,10,9,8	16,12,14,10	
組平均 $\bar{x}_i$	9	8	13	總平均 $\bar{x} = 10$
組變異 S_i^2	14/3	14/3	20/3	

計算：

$$\text{SSTR} = 4(9-10)^2 + 4(8-10)^2 + 4(13-10)^2 = 4+16+36 = 56, \quad \text{MSTR} = \tfrac{56}{3-1} = 28.$$

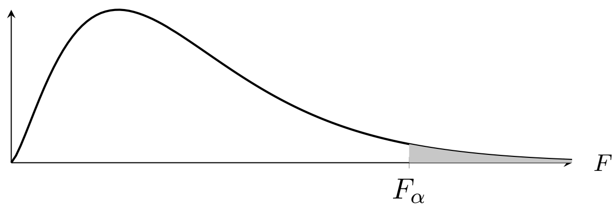
$$\text{SSE} = 3(\tfrac{14}{3}) + 3(\tfrac{14}{3}) + 3(\tfrac{20}{3}) = 14+14+20 = 48, \quad \text{MSE} = \tfrac{48}{12-3} = \tfrac{48}{9} = 5.33.$$

$$F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{28}{5.33} = 5.25, \qquad \text{SST} = 56+48 = 104.$$

八步驟（$\alpha = 0.05$）：$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$；$H_1$: 至少一組不等；$R = \{F \geq F_{0.05}(2,9) = 4.26\}$；$F = 5.25 \geq 4.26 \Rightarrow$ **Reject** H_0：三種包裝的銷售量有顯著差異。

臨界值更正（來源筆誤）

教授講義此題寫 $F_{0.05}(2,9) = 3.2$，**有誤**；查 F 表正確值為 **4.26**。因 $F = 5.25$ 仍 > 4.26，**拒絕的結論不變**。考試請用 4.26。



一因子 ANOVA 為右尾：$R = \{F \geq F_\alpha(k-1, n-k)\}$（陰影面積 α）。

例題 12.1：三個年齡層在股市的投資金額

隨機抽 384 位年長者，分三齡層調查投資金額（千美元）：$n_1 = 123, n_2 = 108, n_3 = 153$；$\bar{x}_1 = 76.21, \bar{x}_2 = 75.14, \bar{x}_3 = 82.69$，總平均 $\bar{x} = 78.49$；$S_1^2 = 787.35, S_2^2 = 712.47, S_3^2 = 718.19$。$\alpha = 0.05$。

$$\text{SSTR} = 123(76.21-78.49)^2 + 108(75.14-78.49)^2 + 153(82.69-78.49)^2 = 4550,$$
$$\text{SSE} = 122(787.35) + 107(712.47) + 152(718.19) = 281446,$$
$$\text{MSTR} = \tfrac{4550}{2} = 2275, \quad \text{MSE} = \tfrac{281446}{384-3} = \tfrac{281446}{381} = 738.7, \quad F = \tfrac{2275}{738.7} = 3.08.$$

$R = \{F \geq F_{0.05}(2,381) \approx 3.04\}$；$3.08 \geq 3.04 \Rightarrow$ **Reject** H_0：三齡層投資金額有顯著差異。

5　公式整理（總表）

量	公式
總平均	$\bar{x}=\dfrac{\sum_i n_i\bar{x}_i}{n}$
處理平方和	$\mathrm{SSTR}=\sum_i n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2=\sum_i \dfrac{T_i^2}{n_i}-\dfrac{T^2}{n}$
誤差平方和	$\mathrm{SSE}=\sum_i (n_i-1)S_i^2=\mathrm{SST}-\mathrm{SSTR}$
總平方和	$\mathrm{SST}=\sum_i\sum_j x_{ij}^2-\dfrac{T^2}{n}$
均方	$\mathrm{MSTR}=\dfrac{\mathrm{SSTR}}{k-1},\ \mathrm{MSE}=\dfrac{\mathrm{SSE}}{n-k}$
檢定統計量	$F=\dfrac{\mathrm{MSTR}}{\mathrm{MSE}}\sim F_{(k-1,\,n-k)}$，右尾

6　易錯點總整理

一因子 ANOVA

- **右尾、單尾**：ANOVA 永遠右尾，$R=\{F\geq F_\alpha(k-1,n-k)\}$；別用雙尾。
- **自由度順序**：分子 $k-1$、分母 $n-k$，別對調；F 表先看分子（行）再看分母（列）。
- **不能用多次 t 檢定取代**：對 k 組兩兩做 t 檢定會**累積放大型一誤差**（整體 α 遠大於 0.05），所以才用 ANOVA 一次檢定。
- **SSE 用 $(n_i-1)S_i^2$ 相加**，不是 $n_iS_i^2$；F 拒絕只說「至少一組不同」，**不指明**是哪幾組。
- **前提**：常態＋等變異＋獨立；常態不成立改用無母數的 Kruskal–Wallis 檢定。
- ANOVA 是等變異兩樣本「聯合 t 檢定」的推廣（$k=2$ 時 $F=t^2$）。

7　計算跳板（數值代入演練）

類型	代入（包裝案例）	結果
總平均	$\dfrac{4(9)+4(8)+4(13)}{12}$	$=10$
SSTR	$4(9-10)^2+4(8-10)^2+4(13-10)^2$	$=56$，MSTR$=56/2=28$
SSE	$3(\frac{14}{3})+3(\frac{14}{3})+3(\frac{20}{3})$	$=48$，MSE$=48/9=5.33$
F 與臨界	$28/5.33$；$F_{0.05}(2,9)$	$=5.25\ \geq\ 4.26$（拒絕）

寫字區：自選一題，從假設寫到結論（八步驟）＋填 *ANOVA* 表

8 自我檢查

1. SST、SSTR、SSE 三者的關係與各自的自由度為何？
2. 為什麼 ANOVA 是右尾檢定？F 太小代表什麼？
3. 比較 4 組平均數，若改用兩兩 t 檢定共做幾次？會有什麼問題？
4. MSE 與「聯合變異數 S_p^2」的關係是什麼？
5. 拒絕 H_0 後，能不能直接說「第 3 組最大」？為什麼？

寫字區：作答

參考答案： 1. SST=SSTR+SSE，df：$n-1=(k-1)+(n-k)$。 2. H_0 假只會讓 MSTR（組間）變大、F 偏大，故右尾；F 太小表組間差異比組內還小，不拒絕。 3. $\binom{4}{2}=6$ 次；多次檢定累積放大整體型一誤差。 4. $k=2$ 時 MSE 就等於 S_p^2，ANOVA 為等變異聯合 t 的推廣（$F=t^2$）。 5. 不能；F 顯著只說「至少一組不同」，要再做多重比較才能指出哪幾組。